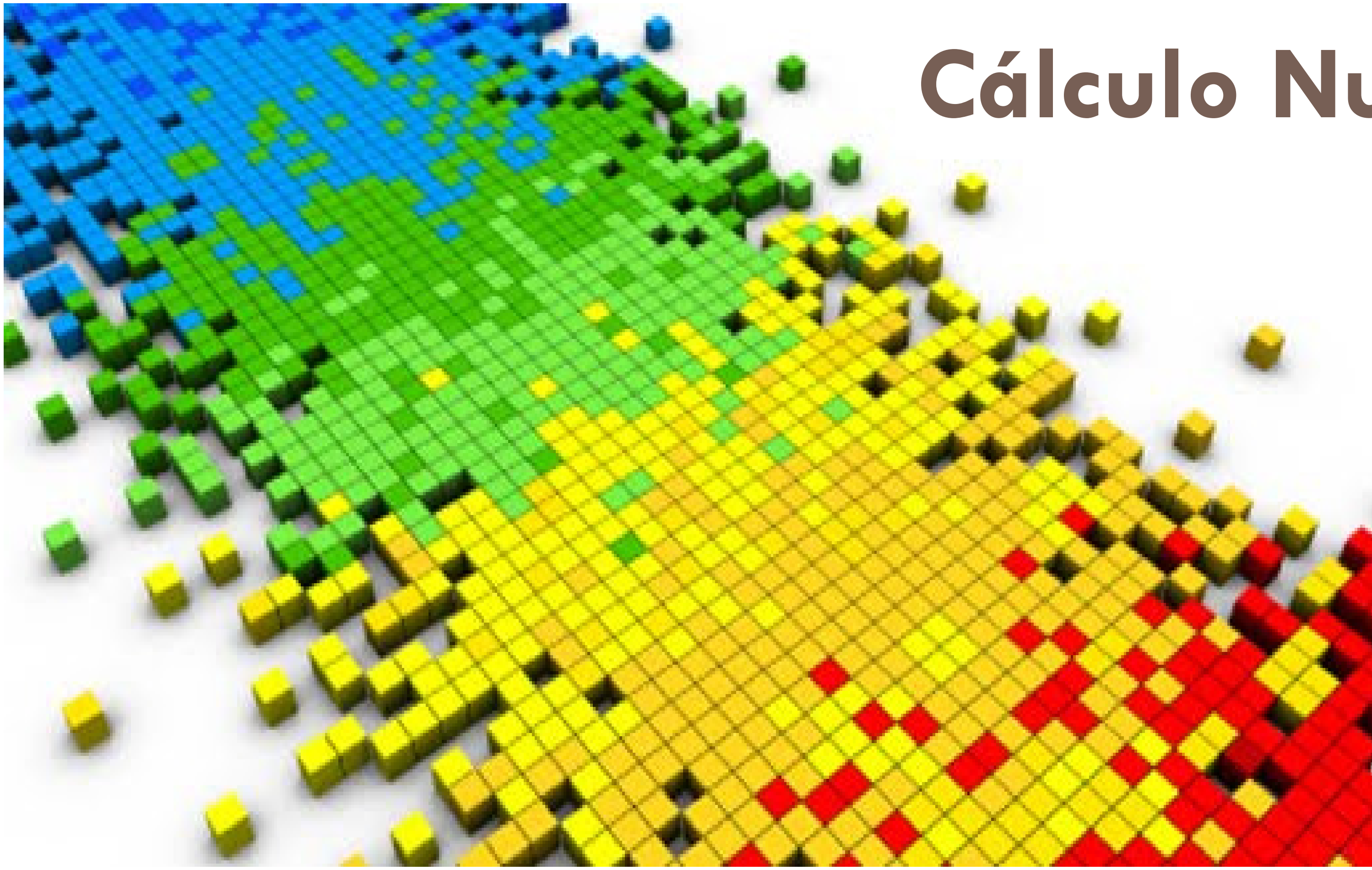


# Cálculo Numérico

## Aula 6 – Método das Secantes e Critérios de Parada

**2014.1 - 22/04/2014**

**Prof. Rafael mesquita**

rgm@cin.ufpe.br

**Adpt. por Prof. Guilherme Amorim**

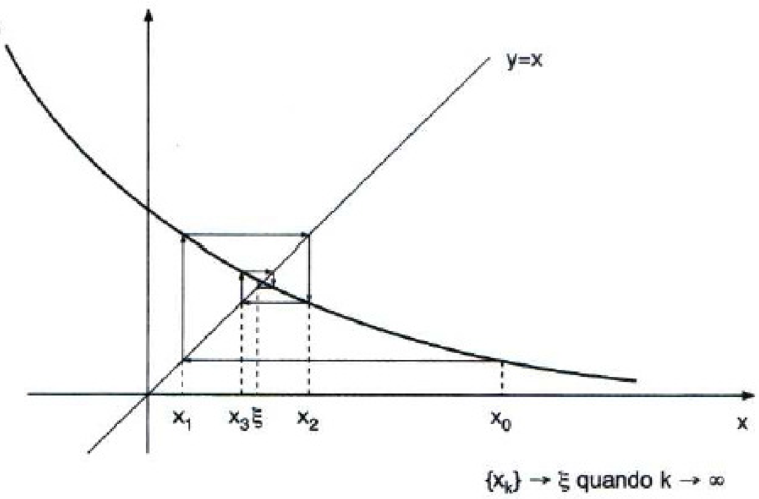
gbca@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática U·F·P·E

# Aula passada?

- Método Iterativo Linear
  - $x_{i+1} = \varphi(\mathrm{x_i}), \mathrm{i} = 0, 1, 2 \ldots$
  - Convergência
    1. **$\varphi$ e $\varphi'$ forem contínuas em $\mathrm{I}$**
    2. $|\varphi'(\mathrm{x})| \leq \mathrm{k} < 1, \forall \mathrm{x} \in \mathrm{I}$
    3. $\mathrm{x_0} \in \mathrm{I}$




- Método de Newton-Raphson
  - Construir uma função de iteração $\varphi$, tal que $\varphi'(\varepsilon)$=0
  - $\varphi(x_i) = x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

# Método das Secantes

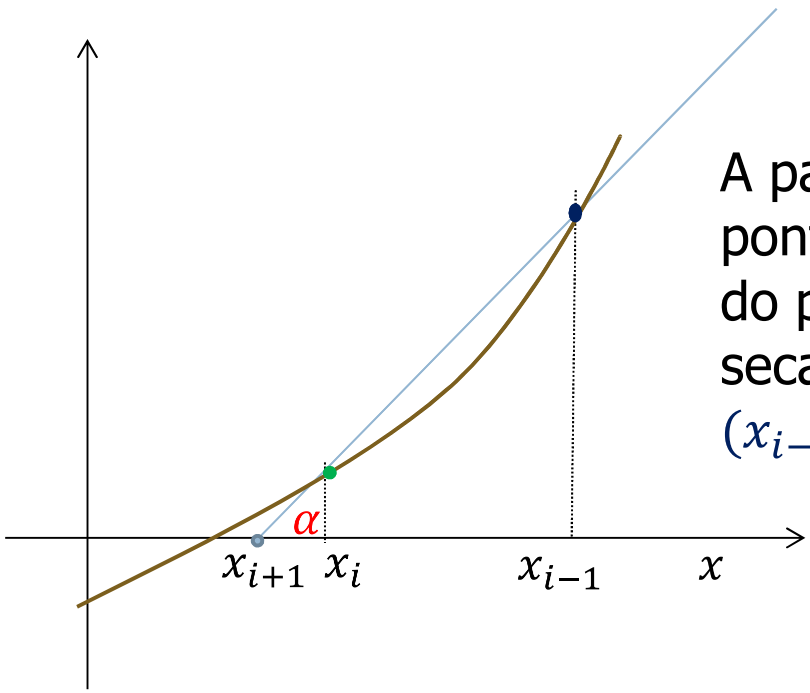
- Possível problema no método de newton
  - $x_{i+1} = x_i - {}^{f(x_i)}\!/_{f'(x_i)}$
  - **Overflow!**
    - **Caso a primeira derivada da função em estudo se aproxime de zero**
  - **Como alternativa à derivada da função, podemos utilizar o quociente**
    - ${}^{(f(x_i)-f(x_{i-1}))}\!/_{(x_i-x_{i-1})}$

# Método das Secantes

- Assim, teremos a seguinte função de iteração:
  - $\boldsymbol{\varphi(x_i) = x_i - \dfrac{f(x_i)}{\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}} =}$
  - **O que nos leva ao seguinte processo iterativo**
  - $x_{i+1} = \dfrac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}, i = 1,2,3 \ldots$
  - **Note que são necessárias duas aproximações para se iniciar o método...*

# Método das Secantes

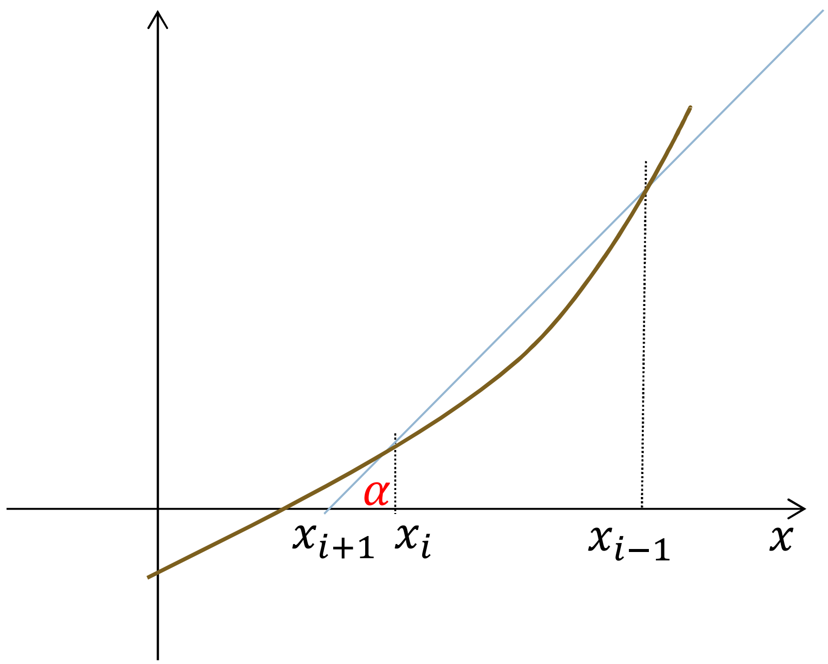
- Interpretação geométrica




A partir de duas aproximações $x_{i-1}$ e $x_i$, o ponto $x_{i+1}$ é obtido como sendo a abcissa do ponto de intersecção do eixo x e da reta secante que passa pelos pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$

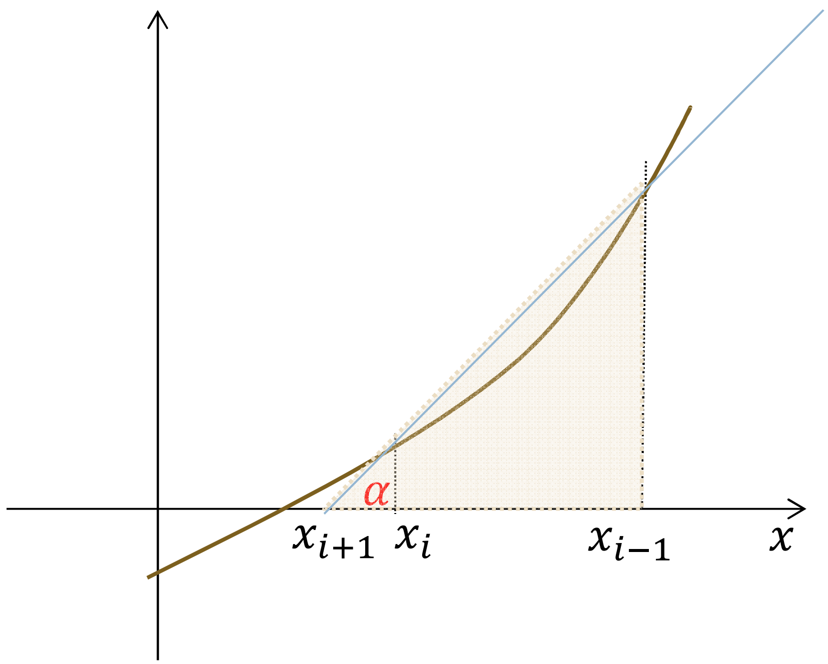
# Método das Secantes

- Interpretação geométrica



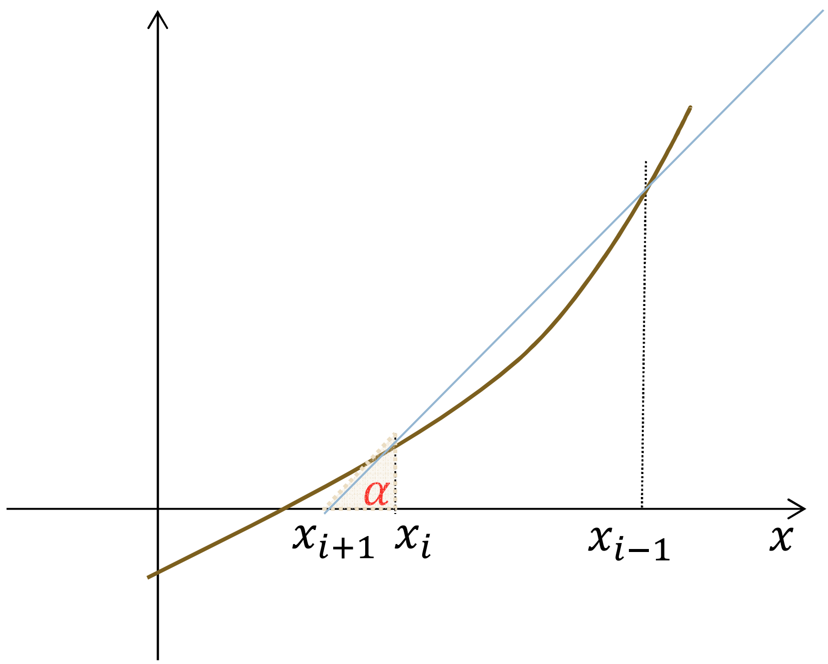
# Método das Secantes

- Interpretação geométrica



# Método das Secantes

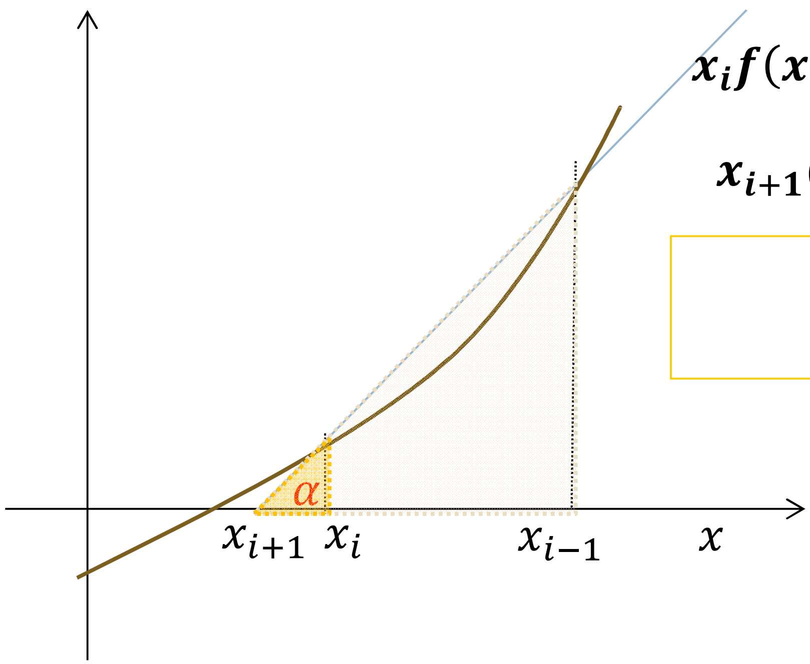
- Interpretação geométrica



# Método das Secantes

- Interpretação geométrica

$$\frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_{i+1}} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$




$$x_i f(x_{i-1}) - x_{i+1} f(x_{i-1}) = x_{i-1} f(x_i) - x_{i+1} f(x_i)$$

$$x_{i+1}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})$$

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

# Pergunta

- Qual a diferença entre o método das cordas e o método das secantes?

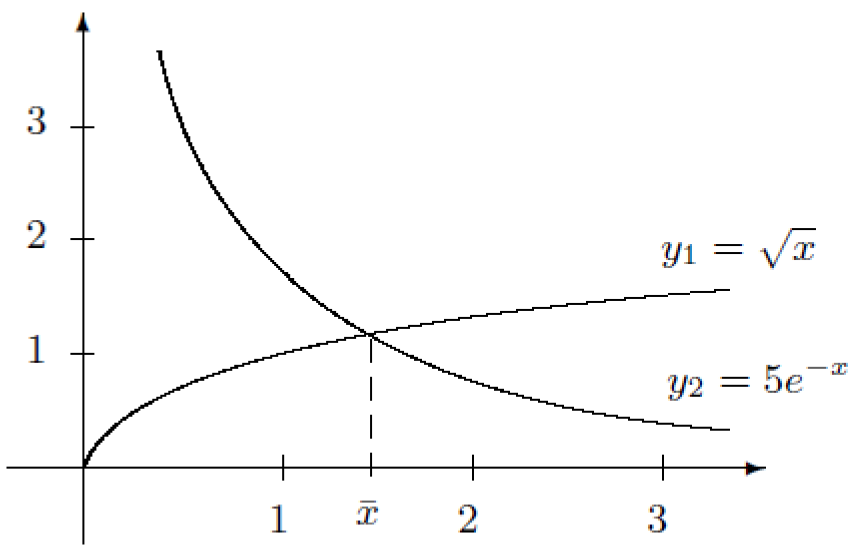
# Notar que...

- Apesar da máquina (função de iteração) geradora da sequência $\{x_i\}$ ser igual à função iteração do método das cordas, o método das secantes é outro método, pois, por não ser um método de quebra, não há escolhas para os valores de $x_{i-1}$ nem para $x_i$. Estes serão sempre os dois últimos termos da sequência $\{x_i\}$.

# Exemplo

- Determinar a raiz positiva da equação abaixo pelo método das secantes com erro relativo inferior a 0,01.

$$\sqrt{x} - 5\,e^{-x} = 0$$



# Exemplo

- Assumimos que a solução está perto de 1,4. Logo, consideramos $x_0$=1,4 e $x_1$=1,5.
  - $f(x_0)$=-0,052; $f(x_1)$=0,010.
  - Logo, $x_2$=1,432.
- Erro relativo: $|x_2-x_1/x_2|$=0,047.
- Calculamos o próximo valor.
  - $f(x_2)$=0,002
  - $x_3$=1,431.
- Erro relativo: $|x_3-x_2/x_3|$=0,0007. OK.
- Logo, a raiz é 1,431.

# Critérios de Parada

- Número de iterações
- Erro absoluto
- Valor da imagem

# Critérios de Parada

- Número de iterações
  - Após terem sido realizadas as iterações previstas, o processo será interrompido
  - Não visa qualidade da aproximação
  - Objetivo: garantir a não entrada em *looping*, caso uma condição de parada mais sofisticada não seja satisfeita

# Critérios de Parada

- Erro absoluto
  - Ideal:
    - Estabelecer parada quando $|x_{i+1} - \varepsilon| < E$, para um dado $E$ conveniente
    - Ou seja, a execução seria interrompida quando a distância entre a raíz aproximada calculada na iteração "i+1" e a raíz exata fosse menor que $E$
    - Possível alternativa: parar quando $|x_{i+1} - x_i| < E$
      - Espera-se que a sequência $\{x_i\}$ seja tal que $\lim_{i \to \infty} |x_{i+1} - \varepsilon| = 0$
      - Mesmo que $|x_{i+1} - x_i| < E$, não existe a garantia de que $|x_{i+1} - \varepsilon| < E$

# Critérios de Parada

- Valor da imagem
  - Buscamos um valor de $x$ para que $f(x) = 0$
  - Podemos verificar quão próximo $f(x_{i+1})$ está de zero
  - Critério de parada: $|f(x_{i+1})| < E$

# Critérios de Parada

- Podemos ainda utilizar a combinação entre diferentes critérios de parada...
- "Vale dizer que mesmo com todo esse cuidado ainda podemos ter surpresas, pois se em um caso específico a convergência for extremamente lenta e o valor da função na vizinhança da raiz em estudo se aproximar bastante de zero, o processo pode ser interrompido sem que efetivamente tenha-se um valor aceitável para a raiz procurada."

# Exemplo

- **Dada** $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 6}$, aplique o método da secante considerando as aproximações iniciais $\boldsymbol{x_0 = 1,5}$ e $\boldsymbol{x_1 = 1,7}$. Execute iterações até que $\boldsymbol{f(x_i) < 10^{-4}}$ ou até que $|\boldsymbol{x_i - x_{i-1}}| < \boldsymbol{10^{-3}}$. Considere uma máquina F(10,6,-9,9)

# Exemplo

- $x_0 = 1,5\,;\, f(x_0) = -2,25$
- $x_1 = 1,7\,;\, f(x_1) = -1,41$
- $x_2 = \frac{1,5.(-1,41)-1,7.(-2,25)}{-1,41+2.25} = 2,03571$

- Teste $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-3}$
  - $|x_2 - x_1| = 1,23017 > 10^{-3}$

- Teste $f(x_i) < 10^{-4}$
  - $f(x_2) = 1,7983.10^{-1} > 10^{-4}$

# Exemplo

- $\boldsymbol{x_1 = 1,7\,; f(x_1) = -1,41}$
- $\boldsymbol{x_2 = 2,03571; f(x_2)} = 1{,}7983.10^{-1}$
- $\boldsymbol{x_3 = \frac{1{,}7.(1{,}7983.10^{-1}) - 2{,}03571.(-1{,}41)}{1{,}7983 + 1{,}41} = 1,99774}$

- Teste $\boldsymbol{|x_i - x_{i-1}| < 10^{-3}}$
  - $|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2| = \boldsymbol{0,03797 > 10^{-3}}$

- Teste $\boldsymbol{f(x_i) < 10^{-4}}$
  - $f(x_3) = 0{,}0113 > 10^{-4}$

# Exemplo

- $\boldsymbol{x_2 = 2,03571}; \boldsymbol{f(x_2)} = 1{,}7983.10^{-1}$
- $\boldsymbol{x_3 = 1,99774}; f(x_3) = 0{,}0113$
- $\boldsymbol{x_4} = \dfrac{\mathbf{2{,}03571.(-1{,}13.10^{-2})-1{,}99774.(1{,}7983.10^{-1})}}{\mathbf{-1{,}13-1{,}7983.10^{-1}}} = \mathbf{1,99999}$

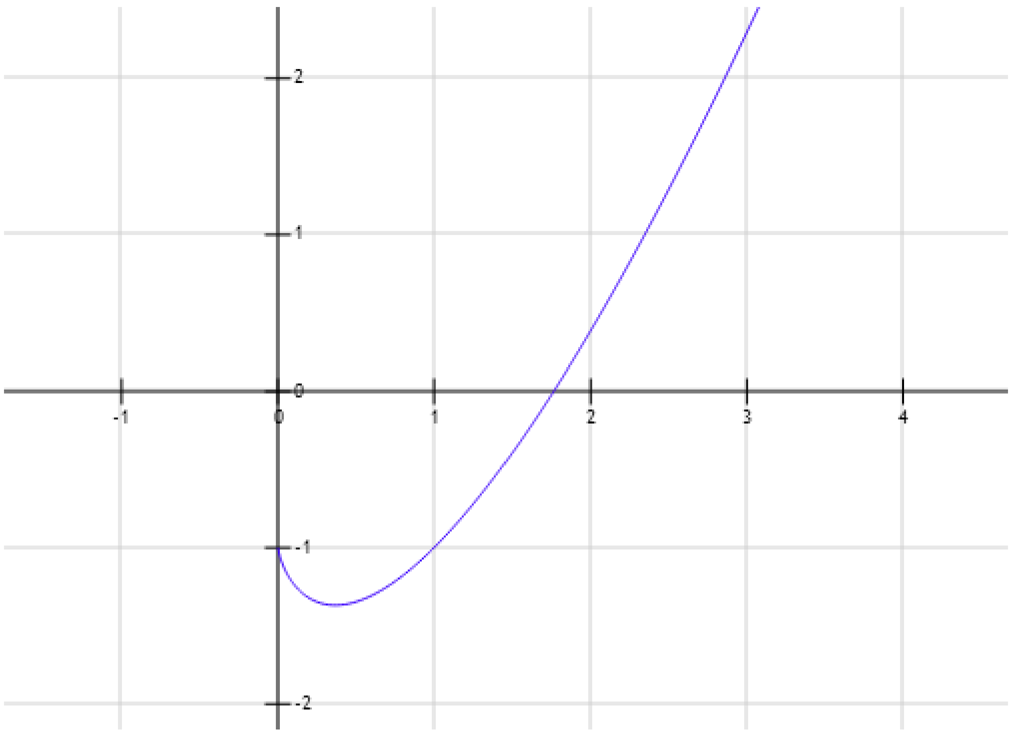
- Teste $|\boldsymbol{x_i - x_{i-1}}| < \mathbf{10^{-3}}$
  - $|\boldsymbol{x_4 - x_3}| = \mathbf{2,25.10^{-3}} > \mathbf{10^{-3}}$

- Teste $\boldsymbol{f(x_i)} < \mathbf{10^{-4}}$
  - $f(x_4) = -4{,}99999.10^{-5} < 10^{-4}$
  - Critério de parada atingido!
    - Raiz aproximada: $x' = \mathbf{1,99999}$

# Exemplo 2

**Exemplo 2.6** - Determinar, usando o método das Secantes, o valor aproximado da raiz real positiva mais próxima da origem da função:

$$f(x) = x \ln x - 1 .$$




- Partindo de
  - [1,7; 1,8]
- $x_{i-1}=1,8$
- $x_i=1,7$

# Exemplo 2

**I** $(x_{i-1} = 1{,}8$ e $x_i = 1{,}7)$.

| Iteração i | $x_{i+1}$ |
|---|---|
| 1 | 1,76280 |
| 2 | 1,76323 |
| 3 | 1,76322 |

# Exemplo 2.. Na prática

- Como poderíamos implementar o método das secantes no Excel?

# Comparação entre os métodos

# Comparação entre os métodos

- Critérios analisados
  - Garantia de convergência
  - Rapidez de convergência
    - Baseado no numero de iterações
    - Não necessariamente isso implica em um menor tempo, visto que o tempo gasto em uma iteração pode variar de método para método...
  - Esforço computacional

# Comparação entre os métodos

- Garantia de convergência
  - Bisseção e Posição Falsa
    - Convergência garantida, desde que:
      - função seja contínua em I,
      - f´(x) mantenha sinal em I
      - f(a).f(b)<0
  - Métodos de ponto fixo
    - Convergência garantida, desde que (além das condições anteriores):
      - $\varphi\ e\ \varphi'$ sejam contínuas em I,
      - $|\varphi'(x)| \leq k < 1, \forall x \in I$
      - $x_0 \in I$
    - Condições mais restritivas de convergência
      - Porém, uma vez que atendidas, os métodos são mais rápidos que os anteriores

# Comparação entre os métodos

- Esforço computacional
  - Medido em função
    - Do número de operações efetuadas a cada iteração
    - Da complexidade dessas operações
    - Do número de decisões lógicas
    - Do número de avaliações de função a cada iteração
    - Do número total de iterações

# Comparação entre os métodos

- Esforço computacional
  - Difícil tirar conclusões gerais sobre a eficiência computacional dos métodos estudados
  - Ex:
    - O método da bisseção é o que efetua cálculos mais simples por iteração
    - Já o método de Newton requer cálculos mais elaborados
      - Cálculo da função e de sua derivada, a cada iteração...
    - No entanto, o número de iterações executadas pelo método da bisseção pode ser muito maior que o número de iterações executadas pelo método de Newton

# Comparação entre os métodos

- Escolha do método deve ser realizada em função de algumas considerações....
- Ex:
  - Considerando que um método ideal é aquele que seja mais rápido, que a convergência esteja assegurada e que os cálculos por iteração sejam simples
    - Método de Newton é uma boa opção, desde que
      1. Seja fácil verificar condições de convergência
      2. Cálculo de f´(x) não seja muito elaborado
    - Caso seja custoso avaliar f´(x) seria mais apropriado utilizar o método das secantes (converge mais rapidamente que os demais)
    - Caso seja difícil avaliar as condições de convergência, poderíamos utilizar um dos métodos de quebra....

# Comparação entre os métodos

- Critério de parada também deve ser levado em conta na escolha de um método...
- Caso o objetivo seja reduzir o intervalo que contém a raiz, por exemplo...
  - Não é aconselhável utilizar os métodos de ponto fixo
    - Trabalham exclusivamente com aproximações $\{x_k\}$ da raiz $x$

# Comparação entre os métodos

- Conclusões
- Escolha do método está diretamente relacionada com
  - A equação que se quer resolver
    - Comportamento da função na região da raíz
  - Dificuldades com o cálculo de f´(x)
  - Critério de parada
  - Necessidades de cada aplicação

# Referências


- [1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.
- [2] Ruggiero, Márcia; Lopes, Vera. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. Pearson. São Paulo, 1996.

  - Comparação entre os métodos!